



RIETI Discussion Paper Series 17-J-072

スポット価格予測に基づくJEPX先渡価格付けモデルの構築

山田 雄二
筑波大学



Research Institute of Economy, Trade & Industry, IAA

独立行政法人経済産業研究所

<http://www.rieti.go.jp/jp/>

スポット価格予測に基づく JEPX 先渡価格付けモデルの構築*

山田 雄二 (筑波大学 ビジネスサイエンス系)

要 旨

電力システム改革に基づく小売電力完全自由化を背景に、日本卸電力取引所 (JEPX) における卸電力の取引所取引が、現在、注目を浴びている。特にスポット電力市場は、2016 年度実績で約定量が総需要の 3%程度に達し、2005 年の開設以来、継続的な取引が行われている。一方、先渡市場については、開設から 10 年以上が経過した現在においても、取引は年に十数件程度とデータがまばらにしか観測されず、実績先渡価格のみから先渡価格のモデルを構築することは困難である。そこで本研究では、現時点で連続的なデータが観測される JEPX スポット価格をベースに、価格予測の考え方をを用いて先渡価格モデルを構築することを考える。

本論文では、JEPX スポット価格の対数系列をトレンドと残差に分解し、金融工学分野におけるデリバティブ価格付け手法の一つである測度変換を適用することで先渡価格を導出する。具体的な手順は以下の通りである。まず、JEPX スポット価格系列を確定的なカレンダーパラメータのトレンド関数とそれ以外の残差項を用いて表現し、残差項を状態空間モデルとして記述する。つぎに、残差に対して時系列モデルを当てはめ、残差の条件付期待値から将来価格を予測するスポット価格予測モデルを構築する。さらに、スポット価格予測モデルに対して、測度変換手法の一つであるエッシャー変換を適用し、先渡価格を定式化する。最後に実証分析を実施し、スポット価格の実績データに対して提案手法を適用した際の先渡受け渡し期間におけるスポット価格の予測精度、および実績先渡ペイオフから推定されるリスク回避度について考察する。

キーワード：日本卸電力取引所 (JEPX)、先渡取引、価格予測モデル、エッシャー変換、リスクプレミアム

JEL classification: C14, C15, C22, C32, C44, C53, G17, L94

RIETI ディスカッション・ペーパーは、専門論文の形式でまとめられた研究成果を公開し、活発な議論を喚起することを目的としています。論文に述べられている見解は執筆者個人の責任で発表するものであり、所属する組織及び(独)経済産業研究所としての見解を示すものではありません。

*本稿は、(独)経済産業研究所におけるプロジェクト「商品市場の経済・ファイナンス分析」の成果の一部である。

1 はじめに

日本卸電力取引所 (Japan Electric Power Exchange; JEPX) は、現物電力の上場取引が可能な国内唯一の電力市場であり、翌日のスポット電力やあらかじめ定められた将来期間の先渡電力など、いくつかの商品が上場取引されている [11]。中でも、翌日受け渡しの電力を売買するスポット市場は、2005 年 4 月 1 日の開設からすでに 10 余年が経過し、近年では取引規模も拡大しデータの蓄積も着々と進んでいる。また、このような実績データの蓄積に伴い、JEPX の取引価格を対象とした電力価格のモデル化や実証分析についての研究も盛んになりつつある [8, 10, 12, 13, 18]。さらに、東京商品取引所 (TOCOM) が JEPX スポット価格を原資産とする電力先物の上場を目指すなど、電力価格変動リスクに対するヘッジ手段としてのデリバティブを利用する環境が、現在急速に整いつつある。

JEPX におけるスポット電力市場では、北海道、東北、東京、中部、北陸、関西、中国、四国、九州のエリアごとに、1 日につき 30 分 (0.5 時間) 単位の送電に関する 48 商品が上場取引されている。エリアごとの価格はエリアプライスと呼ばれ、エリア間をまたいで全量の送電が可能な場合は共通のエリアプライス、全量を送電できない場合は異なるエリアプライスで約定される。仮にエリア間をまたぐ送電に制限がなく、全国共通の価格で取引可能と仮定して計算した価格はシステムプライスと呼ばれ、国内卸電力市場の取引価格指標として、JEPX がエリアプライスの実績値とともに公開している。このようなスポット市場については、約定量が 2016 年度実績で全電力需要の 3% 程度に達するなど、取引量は増加傾向にある。

一方、JEPX における先渡契約は、2009 年 4 月より上場取引されているものの、取引実績は年に数件程度に留まっている。その主な理由としては、以下の 2 点が挙げられる。

1. 電力は貯蓄することが困難で、通常の金融資産に対する派生証券のように、原資産であるスポット電力を用いた先渡価格のヘッジができない、すなわち市場が非完備であること。
2. 売り手側、買い手側ともに、先渡ペイオフの損失リスクに対するリスクプレミアムを要求するため、リスクプレミアムの分、売り入札価格は上昇、あるいは買い入札価格はディスカウントされることで、より取引が成立しにくくなること。

上記項目 1 の市場の非完備性は、Black-Scholes モデル [1] に代表される、通常の金融資産に対するデリバティブの価格付け手法をそのまま適用することができないことにつながり、この点も先渡の価格付け問題を困難にしている。

以上を念頭に、本研究では、JEPX 先渡価格を導出するための理論的枠組みを提案し、さらに実データによってその有効性を検証することを目的とする。具体的には、JEPX スポット価格の対数系列をトレンドと残差に分解し、金融工学分野におけるデリバティブ価格付け手法の一つである測度変換を適用することで、先渡価格を導出することを考える。まず、JEPX スポット価格系列を確定的なカレンダーパラメータのトレンド関数とそれ以外の残差項を用いて表現し、残差項を状態空間モデルとして記述する。つぎに、残差に対して時系列モデルを当てはめ、残差の条件付期待値から将来価格を予測するスポット価格予測モデルを構築する。さらに、スポット価格予測モデルに対して、測度変換手法の一つであるエッシャー変換を適用し、先渡価格を定式化する。また実証分析においては、季節性・曜日祝日・長期トレンドを一般化加法モデルを用いて表現した上で、残差に対して時系列モデルを適用するというアプローチで、提案手法を用いた際の将来価格予測とその精度、および先渡価格実績値のリスクプレミアムについて考察する。なお、一般には、原資産の受け渡し、差金決済、値洗いの有無で先渡と先物を区別する場合があるが、本論文では両者を明確には区別せず、現在

JEPX で取引されている，システムプライスと先渡価格の差額で満期時点の決済が行われる契約を先渡（あるいは先物）契約として取り扱うものとする．

2 本論文における先渡価格付けの基本的な考え方

本節では，JEPX で取引される先渡契約の概要を述べ，先渡モデルを構築する上での問題点，および本論文でのアプローチについて説明する．

2.1 JEPX 先渡取引の概要

JEPX における先渡は，事前に約定した先渡価格で，一定電力を一定期間取引することを想定した契約であるが，実際の清算は，将来の取引期間におけるシステムプライスと固定価格との間の差金決済によって行われる [11]．例えば，将来の販売電力価格を固定しておきたい発電事業主は，先渡契約を結んだ上で当該期間においてスポット市場に売り入札を行うことで，先渡の取引期間においては，固定価格で売電すると同等の効果が得られる．ただし，スポット市場においてはシステムプライスではなくエリアプライスで取引されるため，システムプライスとエリアプライスの差額によって損失が生じる場合もある．なお，本論文においては，先渡取引の対象となる将来期間を，便宜上，受け渡し期間と呼ぶことにするが，先渡契約自体は差金決済によって処理されるので，厳密には（スポット電力の）受け渡しまでは契約に含まれないことに注意する．

JEPX 先渡契約は，全日 24 時間の受け渡し電力に対する 24 時間型と，土日祝日を除く平日 8 時-18 時の電力のみを対象とする昼間型に分類され，それぞれ，1 週間，1 ヶ月，1 年間のいずれかの将来期間（受け渡し期間）において取引を行う．また，1 年間の先渡は受け渡し開始日の 3 年前から前々月末まで，1 ヶ月の先渡は受け渡し開始日の 1 年前から前々月 19 日まで，1 週間の先渡は受け渡し開始日が属する月の前々月 20 日から受け渡し開始日の 3 日前までが約定可能期間（JEPX への入札および落札可能期間）としてそれぞれ設定されている．

2.2 スポット価格と先渡キャッシュフロー

以下，先渡における買い手側・売り手側のキャッシュフロー（CF）を定式化する．定式化においては，記法を簡単にするため，受け渡し期間が連続的である 24 時間型を取り扱うが，昼間型も同様に設定可能であることに注意する．

第 t 日 ($t = 0, 1, 2, \dots$) におけるシステムプライスの日次平均（24 時間の 1kWh あたりの平均価格）を S_t と表記し，受け渡し期間を将来の第 T_0 日から m 日間とする先渡契約を考える．先渡の約定価格（先渡価格）を $F_{t, T_0}^{(m)}$ とすると，買い手側からみた先渡 CF は，次式のように，システムプライスと先渡価格の差額の累積値によって定義される [11]．

$$\sum_{T=T_0}^{T_0+m-1} [S_T - F_{t, T_0}^{(m)}] = \sum_{T=T_0}^{T_0+m-1} S_T - m \times F_{t, T_0}^{(m)} \quad (2.1)$$

以降，日次平均価格 S_t を，単にスポット価格と呼ぶことにする．

JEPX で取引される先渡契約においては，例えば受け渡し期間が 1 ヶ月のもの（すなわち月次先渡契約）であれば，各月の 1 日から月末までが受け渡し対象期間となり，同一時点で全ての先渡が約定されれば，最大 11 個の月次先渡価格が

観測されることになる．このように，同一時点で観測される受け渡し対象期間（この例では受け渡しを行う月）の異なる先渡価格を，受け渡し開始日までの日数（あるいは月数）を横軸として表示した曲線はフォワードカーブと呼ばれる．仮に，先渡市場が流動的で毎月必ず全ての先渡契約が約定するようであれば，一定期間に観測されるフォワードカーブの系列を用いて，先渡価格やフォワードカーブのモデル化を行うことが期待されるが，JEPX における先渡は約定が年に数回と流動性が低く，先渡価格の実績値から直接，先渡価格のモデルを導出することは困難である．

一方，先渡契約自体は，各日におけるスポット価格とあらかじめ決められた先渡価格との差金決済によって取引が実行されるため，純粋にファイナンス問題として捉えることができる．特に，スポット電力を原資産とみなせば，JEPX 先渡は派生証券契約の一種であり，変動価格（スポット価格）と固定価格（先渡価格）のスワップ取引を定義しているものと考えられる．そのため，通常の金融資産と同様に，金融工学手法を用いた派生証券価格付け手法の適用による，先渡の理論価格やフォワードカーブモデルの導出が期待される．以上を背景に，本論文では，JEPX 先渡をスポット価格を原資産とする派生証券契約と捉え，金融工学手法を適用することで先渡価格のモデルを構築することを考える．

2.3 日次先渡価格と金融工学アプローチ

先渡価格 $F_{t,T_0}^{(m)}$ は，受け渡し期間によって m の値が異なるため，1 週間（7 日間），1ヶ月間，1 年間など，異なる m に対して先渡モデルを構築する必要がある．一方，以下のように $m = 1$ とした日次の先渡価格に対するモデルを導入すれば，任意の受け渡し期間 m に対する先渡価格 $F_{t,T_0}^{(m)}$ を，日次先渡価格の平均値として表現可能であることを示すことができる．また，このような日次先渡価格は， S_t を原資産とする派生証券の一つと捉えることができ，金融工学アプローチを適用する上でも取り扱い易い．

本論文では，受け渡し期間が $m = 1$ の先渡価格を，

$$F_{t,T} := F_{t,T}^{(1)} \quad (2.2)$$

のように記述し， $F_{t,T}$ を用いて，任意の m に対する先渡価格 $F_{t,T_0}^{(m)}$ を表現することを考える．第 T_0 日から m 日間受け渡しを行うことを想定し，契約時点 t において m 日分の日次先渡契約を結ぶとすると， m 個の日次先渡による買い手側ペイオフは以下のように与えられる．

$$\sum_{T=T_0}^{T_0+m-1} [S_T - F_{t,T}] = \sum_{T=T_0}^{T_0+m-1} S_T - \sum_{T=T_0}^{T_0+m-1} F_{t,T} \quad (2.3)$$

一方， $F_{t,T_0}^{(m)}$ によって与えられる先渡ペイオフは，(2.1) 式によって与えられるのだが，無裁定の下，(2.1) 式の右辺と (2.3) 式の右辺は互いに等しくなければならないので，次式の関係が成り立つ．

$$m \times F_{t,T_0}^{(m)} = \sum_{T=T_0}^{T_0+m-1} F_{t,T} \Leftrightarrow F_{t,T_0}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{T=T_0}^{T_0+m-1} F_{t,T} \quad (2.4)$$

このように，受け渡し期間が m 日間の先渡価格は， m 個の日次先渡価格の平均によって与えられることが分かる．

(2.3) 式の左辺における個別の日次先渡によるペイオフ

$$S_T - F_{t,T}, \quad T = T_0, \dots, T_0 + m - 1$$

は S_T の関数であり、スポット価格 S_t を原資産とする派生証券契約と捉えることができる。このような派生証券契約の価値 (本論文の場合は先渡価格) を求めるにあたり、Black-Scholes 理論 [1] に代表される金融工学アプローチにおいては、まず、以下の 2 つのステップの適用可能性が検討される。

Step 1: 原資産価格 S_t をモデル化し、市場の完備性をチェックする。

Step 2: 市場が完備であれば、無裁定価格理論を適用し (唯一の) 無裁定先渡価格を導出する。

市場の完備性とは、派生証券のペイオフ (本論文の場合は先渡ペイオフ) が、原資産と無リスク資産のポートフォリオによって複製可能であることを示す。金融派生証券理論における Black-Scholes モデルの場合、原資産取引が可能かつ原資産価格の挙動が幾何ブラウン運動としてモデル化されるのであれば、無裁定の下、市場は完備であることを示すことができる。ところが、電力の場合、一般に市場の完備性は満たされない。これは、電力は貯蔵することができず発電した電力はすぐに消費されなければならないため、現時点のスポット電力を、将来期間 (例えば先渡の受け渡し期間) に受け渡すことができないことに起因する。

3 測度変換を用いた先渡価格

市場が非完備である場合、複製ポートフォリオを構成することができず、原資産と無リスク資産を利用した先渡ペイオフのヘッジは困難である。結果として、売り手側、買い手側ともに損失リスクが存在し¹、これらの損失リスクに対するリスクプレミアムをどのように考慮するかが、先渡に対する価格付けモデル導出のポイントとなる。本論文では、このようなリスクプレミアムを考慮した先渡価格を導出するため、以下に導入する測度変換を適用することを考える。

3.1 Esscher 変換による先渡価格

まず、以下のように JEPX スポット価格の対数系列を、カレンダートレンド $f(t)$ と残差項 η_t を用いて表現する。

$$\ln S_t = f(t) + \eta_t \Leftrightarrow S_t = \exp[f(t) + \eta_t] \quad (3.1)$$

(3.1) 式において、 f は時点 t を引数とする確定的な関数であるが、ここでは時点の関数であることを明示的に表すため $f(t)$ と表記していることに注意する。また、実確率上の確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 、 $\{\eta_t\}$ によって生成されるフィルトレーションを $\{\mathcal{F}_t\}$ とすると、時点 t を添え字としてもつ変数は、 \mathcal{F}_t -可測な確率変数を表す。

仮に先渡市場における全ての投資家がリスク中立、すなわち、将来のスポット価格の変動に対してリスクプレミアムを要求しないのであれば、先渡価格は実確率測度 \mathbb{P} 上での S_T の期待値 (平均) によって与えられる。一方、例えば売り手側が将来の原資産価格の変動に対してリスクプレミアムを要求する場合、リスクプレミアムを上乗せした価格で入札を行うであろう。また、買い手側がリスクプレミアムを要求する場合は、リスクプレミアムの分、ディスカウントして入札することが考えられる。測度変換とは、不確実な支払額をもつ商品 (あるいは契約) の価値を計算する際に、実確率

¹例えば、将来時点における燃料価格の高騰等で、発電コストが先渡契約時に見積もった値を上回れば、契約時に約定した先渡価格で売電することは、売り手側発電事業主にとって損失につながる。また、買い手側小売り事業主にとっても、電力需要が想定したものより低い場合に余剰電力が発生するなどの損失が発生する可能性がある。

測度 \mathbb{P} を変換することで、売り手側、あるいは買い手側リスクプレミアムを反映した価格を、変換後の確率測度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 上の期待値として導出する手法である。

派生証券価格付けにおける測度変換の役割については、文献 [5] で体系的に論じられている。本論文では、そこで取り扱われている測度変換の一つである Esscher 変換を JEPX 先渡価格の導出に用いる。Esscher 変換とは、本来、将来の保険金支払額変動の不確実性に対するリスクプレミアムを反映した保険価格導出手法であるが、派生証券価格付けの観点からは、Esscher パラメータと呼ばれる資産価格変動要因に関するリスク回避係数を用いて、測度変換を定義する手法と捉えることができる²。

まず、文献 [5] と同様に、Esscher 変換における測度変換を与える確率過程 Z_t を以下の通り導入する。

$$Z_t := \mathbb{E} \left[\frac{e^{\lambda \eta_T}}{\mathbb{E}[e^{\lambda \eta_T}]} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.2)$$

このとき、Esscher 変換を適用した先渡価格 $F_{t,T}$ は、次式で与えられる。

$$F_{t,T} = \tilde{\mathbb{E}}[S_T | \mathcal{F}_t] = \frac{1}{Z_t} \mathbb{E}[S_T Z_T | \mathcal{F}_t], \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.3)$$

ただし、 T は先渡満期時点、 λ は Esscher 係数と呼ばれるパラメータであり、 $\tilde{\mathbb{E}}$ は、次式を満たすリスク中立確率測度 $\tilde{\mathbb{P}}$ の下での期待値オペレータである³。

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) := \mathbb{E}[I_A Z_T], \quad A \in \mathcal{F}_T \quad (3.4)$$

$\{\eta_t\}$ がガウス過程であれば⁴、 \mathbb{P} 上での η_T の積率母関数は $\psi_{\eta_T}(u) = \mathbb{E}[\exp(u\eta_T)] = \exp(u^2\sigma_{\eta_T}^2/2)$ である (ただし、 σ_{η_T} は η_T の標準偏差)。一方、 $\tilde{\mathbb{P}}$ 上での η_T の積率母関数は、

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\eta_T}(u) &= \tilde{\mathbb{E}}[\exp(u\eta_T)] = \mathbb{E}[\exp(u\eta_T) Z_T] \\ &= \mathbb{E}[\exp((u + \lambda)\eta_T)] / \mathbb{E}[\exp(\lambda\eta_T)] = \psi_{\eta_T}(u + \lambda) / \psi_{\eta_T}(\lambda) \\ &= \exp(u\lambda\sigma_{\eta_T}^2 + u^2\sigma_{\eta_T}^2/2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

であり、結果として η_T の確率分布は、 $\tilde{\mathbb{P}}$ 上では平均が $\lambda\sigma_{\eta_T}^2$ だけシフトすることが分かる。 $S_T = e^{f(T)+\eta_T}$ であるので、 η_T の平均が正方向にシフトすれば、時点 0 における先渡価格 (すなわち $F_{0,T}$) は上昇する。 $\lambda = 0$ の場合において $F_{0,T}|_{\lambda=0} = \mathbb{E}[S_T]$ であるので、 $\lambda > 0$ の際に $F_{0,T} > \mathbb{E}[S_T]$ 、 $\lambda < 0$ の際に $F_{0,T} < \mathbb{E}[S_T]$ が成り立つ。本論文では、保険価格に対して Esscher 変換を適用する場合と同様、 $\lambda > 0$ の場合を先渡価格に対する正のリスクプレミアム、 $\lambda < 0$ の場合を先渡価格に対する負のリスクプレミアムと呼ぶことにする。

リスクプレミアムが正である先渡価格で約定することは、売り手側発電事業主が要求するリスクプレミアムに買い手側が同意した状態であると考えられる。買い手側である小売り事業者としては通常、需要変動の不確実性の分、先渡価格に負のリスクプレミアム (原資産の期待値からのディスカウント) を要求するはずであるが、一方で買い手側が正のリスクプレミアムに同意することは、将来の電力需要を賄うための電力を事前に固定価格で確保することによる利便性の対価と解釈される。同様のことは、買い手側の要求するリスクプレミアムに売り手側が同意するケースでも考えられ、リスクプレミアムが負である先渡価格で約定することは、発電電力の売電先を事前に固定価格で確保することによる利便性の対価と考えられる。

²文献 [5] では、Esscher 変換を指数関数として表現された正の確率変数による測度変換と位置づけ、他の保険価格付け手法や金融デリバティブの価格付け手法、および期待効用による価格原理に関連する一般的な枠組みとして議論している。

³測度変換を用いた条件付期待値については、ベイズの定理 (例えば [5, 16] 参照) から計算される。

⁴第 3.2 節の状態空間モデル (3.6) に従う場合、 $\{\eta_t\}$ はガウス過程である。

3.2 状態空間モデルと予測値の計算

本論文では, $\{\eta_t\}$ が以下の状態空間モデルに従うケースを取り扱う.

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + Bw_t \\ \eta_t = C^\top x_t \end{cases} \quad (3.6)$$

ただし, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $C \in \mathbb{R}^n$ は定数行列 (あるいはベクトル) であり, $x_t \in \mathbb{R}^n$ は状態変数ベクトル, $w_t \sim \mathbf{N}(0, \Sigma)$ は l 次元ホワイトノイズ ($\Sigma \in \mathbb{R}^{l \times l}$ は分散共分散行列) である. なお, (3.1), (3.6) 式で与えられる原資産価格の表現は, 付録 A で示すファクターモデルに加え, 下記のような線形時系列モデルを含んでいる⁵.

$$AR(p): \eta_t = a_1\eta_{t-1} + \cdots + a_p\eta_{t-p} + c + \varepsilon_t \quad (3.7)$$

$$ARMA(p, q): \eta_t = a_1\eta_{t-1} + \cdots + a_p\eta_{t-p} + b_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + b_q\varepsilon_{t-q} + c + \varepsilon_t \quad (3.8)$$

このことは, $\{\eta_t\}$ が AR モデル (3.7), あるいは ARMA モデル (3.8) に従う場合, 状態変数を適切に設定することで, (3.6) 式のように状態空間表現されることから確認できる [4]. いずれのケースも, (3.1) 式における残差の系列 $\{\eta_t\}$ は, ガウス過程として与えられる⁶. なお, 本論文の実証分析においては, 簡単のため, $AR(p)$ を用いて $\{\eta_t\}$ をモデル化する.

先渡価格を導出する前に, 残差系列 $\{\eta_t\}$ が状態空間モデル (3.6) に従う場合の, 将来時点 T における残差 η_T , および原資産 S_T の予測値を計算しよう. まず, (3.6) 式より, η_T は次のように表現される.

$$\eta_T = C^\top \sum_{s=1}^{T-t} A^{T-t-s} B w_{t+s} + C^\top A^{T-t} x_t \quad (3.9)$$

このとき, 時点 $t \in [0, T]$ における η_T の予測値は, 以下に定義する条件付き期待値 $g_{t,T}$ によって与えられる.

$$g_{t,T} := \mathbb{E}[\eta_T | \mathcal{F}_t] = C^\top A^{T-t} x_t \quad (3.10)$$

また, $\eta_T - g_{t,T}$ は η_T の予測誤差を表し,

$$\eta_T - g_{t,T} = C^\top \sum_{s=1}^{T-t} A^{T-t-s} B w_{t+s} \quad (3.11)$$

のように時点 $t+1$ 以降のホワイトノイズにのみ依存するので, \mathcal{F}_t と条件付独立である. よって, S_T の条件付期待値 $\mathbb{E}[S_T | \mathcal{F}_t]$ は, 以下のように計算される.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_T | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}\left[e^{f(T)+\eta_T} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{f(T)} \mathbb{E}\left[e^{(\eta_T - g_{t,T}) + g_{t,T}} \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &= e^{f(T) + g_{t,T}} \mathbb{E}\left[e^{\eta_T - g_{t,T}}\right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

(3.12) 式は, このような S_T の条件付き期待値 $\mathbb{E}[S_T | \mathcal{F}_t]$ が, 残差予測誤差 $\eta_T - g_{t,T}$ の分布によって与えられることを示す.

⁵ただし, a_i, b_j, c は定数, $\{\varepsilon_t\}$ はホワイトノイズである.

⁶ $\{\eta_t\}$ が加法モデルに従う場合も, 本論文と同様の先渡価格の導出が可能であるものと考えられるが, 今後の課題としたい.

3.3 先渡価格の導出

最後に、(3.3) 式で与えられる Esscher 変換を適用した先渡価格を導出する。\$g_{t,T}\$ は \$\mathcal{F}_t\$-可測な確率変数、\$\eta_T - g_{t,T}\$ は \$\mathcal{F}_t\$ とは条件付き独立であるので、(3.2) 式の \$Z_t\$ は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}
 Z_t &= \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{e^{\lambda \eta_T}}{\mathbb{E}[e^{\lambda \eta_T}]} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \frac{\tilde{\mathbb{E}} [e^{\lambda \{(\eta_T - g_{t,T}) + g_{t,T}\}} \middle| \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E} [e^{\lambda \{(\eta_T - g_{t,T}) + g_{t,T}\}}]} \\
 &= \frac{e^{\lambda g_{t,T}} \tilde{\mathbb{E}} [e^{\lambda (\eta_T - g_{t,T})} \middle| \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E} [e^{\lambda (\eta_T - g_{t,T})}] \mathbb{E} [e^{\lambda g_{t,T}}]} \\
 &= \frac{e^{\lambda g_{t,T}}}{\mathbb{E} [e^{\lambda g_{t,T}}]} \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

従って、先渡価格 \$F_{t,T}\$ は次式を満たす。

$$\begin{aligned}
 F_{t,T} &= \tilde{\mathbb{E}} [S_T \middle| \mathcal{F}_t] = \frac{1}{Z_t} \mathbb{E} [S_T Z_T \middle| \mathcal{F}_t] \\
 &= \frac{\mathbb{E} [e^{\lambda g_{t,T}}]}{e^{\lambda g_{t,T}}} \mathbb{E} \left[e^{f(T) + \eta_T} \frac{e^{\lambda \eta_T}}{\mathbb{E} [e^{\lambda \eta_T}]} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 &= e^{f(T)} \frac{\mathbb{E} [e^{\lambda g_{t,T}}]}{e^{\lambda g_{t,T}}} \mathbb{E} \left[\frac{e^{(\lambda+1)\{(\eta_T - g_{t,T}) + g_{t,T}\}}}{\mathbb{E} [e^{\lambda \{(\eta_T - g_{t,T}) + g_{t,T}\}}]} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 &= e^{f(T) + g_{t,T}} \frac{\mathbb{E} [e^{(\lambda+1)(\eta_T - g_{t,T})}]}{\mathbb{E} [e^{\lambda(\eta_T - g_{t,T})}]} \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

なお、(3.14) 式先渡価格は、キムラント母関数を介して、\$\eta_T - g_{t,T}\$ の標準偏差 \$\sigma_{\eta_T - g_{t,T}}\$ の関数として理論的に表現可能であるが(付録 B.1 参照)、第 5 節の実証分析においては、分析期間における先渡価格を導出するにあたり、残差予測誤差 \$\eta_T - g_{t,T}\$ の標本分布を利用して計算することを考える。次節では、このような実証分析で適用する先渡価格の計算手順について説明する。

4 カレンダートレンド・残差予測値と先渡価格の計算手順

具体的な実証分析結果を示す前に、本節では、(3.1) 式におけるカレンダートレンド \$f(t)\$ と残差予測値の推定方法、および実績データと予測値に基づく先渡価格の計算手順について説明する。

4.1 GAM によるカレンダートレンドの抽出

電力は、気温の影響によって需要が変化するため、価格特性が時間帯ごとに異なることが想定される。また、同一時間帯の価格データを時系列でみた場合、周期性による電力需要の変化や、曜日・休日の影響などのカレンダー特性をもつことが考えられる。これらの特徴を勘案し、論文 [19] では、時間帯ごとの価格データを一つの系列として、周期性、曜日効果、休日効果を抽出し、残差成分に対して多変量時系列モデルを構築するという方針で、時間帯価格予測のための

モデル化を行った。本論文では、そこでの考え方を日次平均価格 S_t の対数系列に適用し、 $\ln S_t$, $t = 1, \dots, N$ に対して、次式を満たす一般化加法モデル (Generalized Additive Model; GAM [7]) を構築することを考える⁷。

$$\begin{aligned} \ln S_t &= f(t) + \eta_t \\ &\equiv h(\text{Seasonal}_t) + \beta_1 \text{Mon}_t + \beta_2 \text{Tue}_t + \dots + \beta_6 \text{Sat}_t + \beta_7 \text{Hoilday}_t + \beta_8 \text{Period}_t + \eta_t \end{aligned} \quad (4.1)$$

ただし、 h は GAM で推定する平滑化スプライン関数、 β_i , $i = 1, \dots, 8$ は回帰係数、 η_t は $\mathbb{E}[\eta_t] = 0$ を満たす残差項であり、各変数は次のように定義される。

Seasonal_t : 周期性トレンドを表す年次周期ダミー変数 ($= 1, \dots, 365$ (or 366)).

$\text{Mon}_t, \text{Tue}_t, \dots, \text{Sat}_t$: 曜日効果を表すダミー変数. 例えば $\text{Mon}_t = 1$ (月曜) or 0 (それ以外) など.

Holiday_t : 休日効果を表すダミー変数 (土日祝日なら 1 , それ以外 0).

Period_t : 長期線形トレンドを表す日次ダミー変数 ($= 1, \dots, N$).

GAM (4.1) における残差以外の項は、長期トレンド、周期性トレンド、祝日・曜日トレンドを表す日付や曜日に関する項であり、カレンダー・トレンドを表す関数 $f(t)$ を与える。このように、 $\ln S_t$ は、GAM (4.1) を適用することにより、カレンダー・トレンド $f(t)$ と残差項 η_t に分解される。なお、1年周期の季節性を表す季節性トレンド関数 h を推定する年次周期ダミー (周期性ダミー) は、データの起点から1年周期で順番に1から365 (ダミー変数を割り当てる期間に2月29日が含まれる場合は366) を順次割り当てた変数である。このような周期性ダミーについての平滑化スプライン関数 h であるが、GAM (4.1) をそのまま適用した場合、ダミー変数の始点と終点においてスプライン関数が接続しないという問題がある。また、うるう年の2月29日を含む場合に周期が366日となり、厳密には1年は同一周期でないことも考慮する必要がある。

本論文では、これらの課題に対応するため、線形回帰モデル $Y = Xb + e$ (ただし、 Y は被説明変数の標本ベクトル、 X は説明変数の標本行列、 e は残差ベクトル) において、

$$\begin{bmatrix} Y \\ Y \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ X \\ X \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} e \\ e \\ e \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

のように変数を重複させても回帰係数の推定値は同じ ($\hat{b} = (X^\top X)^{-1} X^\top Y$) であることを利用し、ダミー変数の始点と終点で平滑化スプライン関数 h が近似的に接続するように、GAM (4.1) を構築することを考える。具体的な手順は以下の通りである。

1. Y を被説明変数 (本分析では時間帯価格) の標本ベクトル、 X を周期性ダミー以外の説明変数の標本行列、 $S^{(i)}$ を1年周期が下記 (a), (b), (c) で定義される $\text{Seasonal}_t^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) の標本ベクトルとする。

(a) 2月29日を含む期間:

$$\text{Seasonal}_t^{(1)} = -365, \dots, 0, \quad \text{Seasonal}_t^{(2)} = 1, \dots, 366, \quad \text{Seasonal}_t^{(3)} = 366, \dots, 731$$

⁷本論文では、R3.0.2 (<http://cran.r-project.org/>) のパッケージ `mgcv` 内の関数 `gam()` を用いて GAM を構築する。なお、`gam()` では、平滑化パラメータの算出に一般化クロスバリデーション規準 [17] を採用している。

(b) (a) の翌期:

$$Seasonal_t^{(1)} = -364, \dots, 0, \quad Seasonal_t^{(2)} = 1, \dots, 365, \quad Seasonal_t^{(3)} = 367, \dots, 731$$

(c) 上記以外:

$$Seasonal_t^{(1)} = -364, \dots, 0, \quad Seasonal_t^{(2)} = 1, \dots, 365, \quad Seasonal_t^{(3)} = 366, \dots, 730$$

2. 次式で与えられる被説明変数の標本ベクトル, 説明変数の標本行列の組について, GAM (4.1) を当てはめる .

$$\begin{bmatrix} Y \\ Y \\ Y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} S^{(1)} & X \\ S^{(2)} & X \\ S^{(3)} & X \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

3. $Seasonal_t^{(2)} = 1, \dots, 365$ (366) の場合の平滑化スプライン関数を周期関数として採用する .

GAM を適用した分析手法であるが, 回帰分析に基づくため, 他の説明変数を加えることが可能であり, かつ一つの分析モデルで時間価格に対する説明変数の有意性等を評価することができるなどの利点がある⁸. また, うるう年 (2月29日を含む期間) においてデータを1日分削除しないですむので, 週次予測を行う際に曜日がずれないなど, 予測評価にも適している.

(4.1) 式を用いて先渡価格を計算する場合, 本来はカレンダー・トレンドを与える関数 f も将来時点のデータに依存する不確実性をもつ. すなわち, GAM (4.1) における平滑化関数 h や回帰係数 $\beta_i, i = 1, \dots, 8$ は過去データから推定されるため, 将来の観測データによって変動する. 本論文では, このようなカレンダー・トレンドの汎化性に関しては今後の課題とし, 分析に際しては全てのデータ期間 $t = 1, \dots, N$ で共通のカレンダー・トレンド関数 f を用いるものとする .

4.2 残差予測誤差の推定と先渡価格の計算

つぎに, GAM (4.1) の残差 $\{\eta_t\}$ に対して線形時系列モデルを適用し, 残差予測値や残差予測誤差の分布を算出する手順を示す. 第3.2節でも述べた通り, 本論文では, $\{\eta_t\}$ のモデルとして $AR(p)$ を仮定する. ここでは, データ期間 $t = 1, \dots, N$ における $\{\eta_t\}$ について, インサンプルの学習期間として第 k 日までの L 個の観測データを用いて AR 係数 $a_i, i = 1, \dots, q$ を推定し, アウトオブサンプルである τ 日先の $\eta_{k+\tau}$ の予測値を計算する. なお, $\{\eta_t\}$ が $AR(p)$ に従う際の, $\eta_{k+\tau}$ の予測値を与える条件付き期待値は, 付録 B.2 の (B.4) 式で導出している .

カレンダー・トレンドの推定を含めた先渡価格計算の具体的な手順を以下に示す .

1. 全期間 ($t = 1, \dots, N$) の JEPX 日次スポット価格に対して GAM (4.1) を適用することによって, 平滑化関数 h , および回帰係数 $\beta_i, i = 1, \dots, 8$ を推定し, スポット価格 S_t をカレンダー・トレンドと残差 η_t に分解する .
2. k を予測実施時点, L を時点 k までの学習期間の長さ, τ を予測ホライズンと仮定する. $k = L, \dots, N - \tau$ に対して以下を繰り返す .

⁸ただし, データを重複して推定するため t 値を調整する必要がある. 例えば標準的な重回帰モデルの場合, データを重複させると回帰係数の t 値は重複の回数倍される

(a) 学習期間の残差項に対して AR モデル (3.7) を構築し⁹, (B.4) 式を用いて条件付期待値 $\hat{g}_{k,k+\tau} := \mathbb{E}[\eta_{k+\tau} | \mathcal{F}_k]$ を計算する.

(b) $\hat{g}_{k,k+\tau}$ を, 時点 k から τ 日後 (時点 $k + \tau$) の残差予測値とし, 予測誤差 $\eta_{k+\tau} - \hat{g}_{k,k+\tau}$ を算出する.

3. 与えられたリスク回避係数 λ , 時点 t , 満期 $T = t + \tau$ に対し, (3.14) 式で与えられる日次先渡価格 $F_{t,t+\tau}$ の推定値 $\hat{F}_{t,t+\tau}$ ($t = L, \dots, N - \tau$) を, 次式を用いて計算する.

$$\hat{F}_{t,t+\tau} = e^{f(t+\tau) + \hat{\eta}_{t,\tau}} \times \frac{\sum_{k=L}^{N-\tau} e^{(\lambda+1)(\eta_{k+\tau} - \hat{g}_{k,k+\tau})}}{\sum_{k=L}^{N-\tau} e^{\lambda(\eta_{k+\tau} - \hat{g}_{k,k+\tau})}}, \quad t = L, \dots, N - \tau \quad (4.4)$$

なお, 精度を検証する際の比較対象としては, (状態空間モデルを介さず) 時点 k の残差の値 η_k を $\eta_{k+\tau}$ の予測値とするランダムウォーク (Random walk; RW) 予測を用いる. 例えば, 上記手順において AR モデルではなく RW 予測を用いるのであれば, $\hat{g}_{k,k+\tau}$ は η_k の観測値に置き換えることに注意する. また, 先渡価格の推定値 (4.4) において $\lambda = 0$ とした $\hat{F}_{t,t+\tau}|_{\lambda=0}$ は, 時点 $t + \tau$ における原資産価格 $S_{t+\tau}$ の条件付期待値 (の推定値) であり, 原資産価格の予測値を与える.

5 実証分析

本節では, 2012 年 4 月 1 日から 2016 年 12 月 31 日までの JEPX システムプライスと上記期間内に取引が成立した週間 24 時間型先渡価格を用いて, 提案手法を適用した際の予測精度や実績データがインプライするリスク回避係数について検証する¹⁰. なお, 第 2 節でも述べた通り, JEPX で取引されている先渡の受け渡し期間は, 1 年間, 1 週間, 1 ヶ月間のいずれかに設定されているが, 本論文では, 取引成立件数が他の期間のものよりも多いこと, また 24 時間連続した時間帯を対象とし, かつ休日などが除外されないため受け渡し期間が一定であることから, 週間 24 時間型先渡価格の実績データを分析に用いる.

5.1 カレンダートレンド推定結果

Fig. 5.1 の棒グラフは, 曜日ダミー Mon_t, \dots, Sat_t の係数 β_1, \dots, β_6 , 休日ダミー変数の係数 β_7 の推定値を表している. また, 長期トレンド変数の係数 β_8 , 定数項 c は以下の通りである.

$$\beta_8: -4.70 \times 10^{-4}, \quad c: 2.81$$

なお, これらの係数は全て, 0.1%未満の水準で有意であった. 休日効果を表すダミー変数は土曜日を含むが, 曜日ダミー変数における土曜日の係数は正で有意なので, 他の休日よりは若干であるが価格が上昇している. また, 平日については, 全てのダミー変数の係数は正であり, かつ月曜日から金曜日にかけての係数の値に大きな差異はない.

⁹本論文では, MATLAB モジュールである ARfit [9] (<http://clidyn.ethz.ch/arfit/index.html>) を用いて AR モデルを構築する. なお, ARfit においては, 次数 q は Schwarz's Bayesian Criterion によって決定される.

¹⁰本論文で用いる JEPX スポット電力, および先渡価格に関するデータは, JEPX ホームページ (<http://www.jepx.org/market/index.html>) よりダウンロードしている. なお, 分析データにおけるスポット価格の時系列方向のサンプル数は $N = 1,698$ ($t = 1, \dots, N$) である.

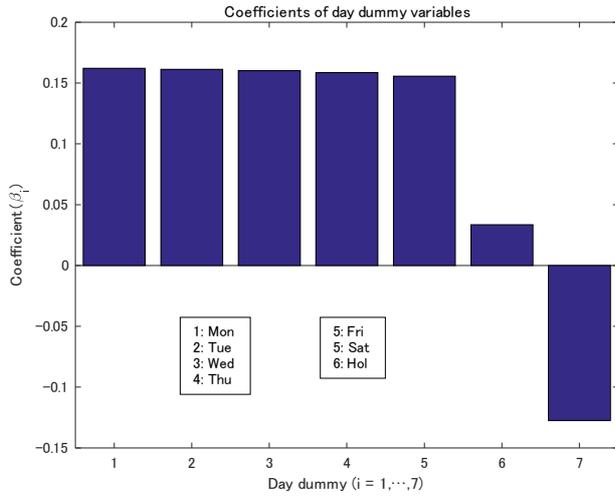


Fig. 5.1: β_i (月-土, 休日ダミー係数) の推定値

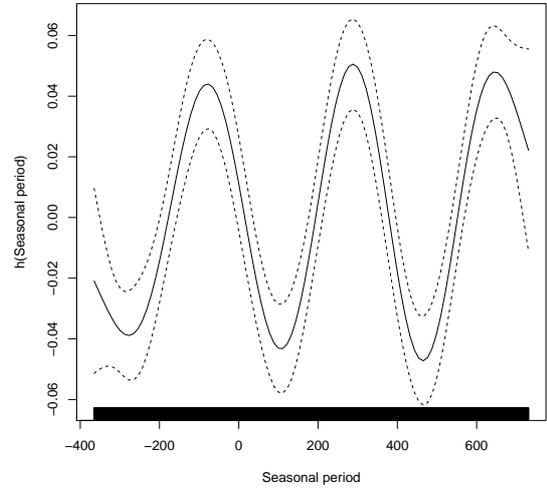


Fig. 5.2: GAM による季節性トレンド関数の推定結果

Fig. 5.2 の実線は, (4.1) 式の季節性トレンド関数 h の推定結果 (ただし横軸は季節性ダミー変数の値), 点線は 95% 信頼区間を示す. なお, 季節性トレンド関数 h としては, 季節性ダミー変数の値が $1, \dots, 365$ (366) の場合の平滑化スプライン関数を採用することに注意する. このようにして抽出した周期性関数においては, 冬季の 1 月中旬頃, 対数価格のトレンドが最大化されることが分かる. なお, 本分析における GAM あてはめの際の調整済み決定係数は $R^2 \simeq 0.619$ であり, カレンダートレンドのみで総変動の約 62% が説明されている.

5.2 予測誤差を用いた分析

つぎに, 状態空間モデルを用いて残差予測を行った際の予測精度について検証する. ここでは, 残差項 η_t が (3.7) 式に従うとし, 予測ホライズンである τ 日後の残差 $\eta_{t+\tau}$ の条件付期待値の推定値 $\hat{g}_{t,t+\tau}$ を計算する. 具体的には, 付録 4.2 で示す予測手順を用いてアウトオブサンプルの予測誤差 $\eta_{k+\tau} - \hat{g}_{k,k+\tau}$ を予測ホライズン τ と各時点 $k = L, L+1, \dots, N-\tau$ (ただし L は学習期間の長さ) について求め, 予測誤差の平均絶対誤差 (Mean absolute error; MAE) と標準偏差 (Standard deviation; SD) を次式に基づいて計算することで, 残差のアウトオブサンプル予測に関する予測精度について考察する.

$$MAE = \frac{1}{N - \tau - L + 1} \sum_{k=L}^{N-\tau} |\eta_{k+\tau} - \hat{g}_{k,k+\tau}|, \quad SD = \sqrt{\frac{1}{N - \tau - L} \sum_{k=L}^{N-\tau} \{(\eta_{k+\tau} - \hat{g}_{k,k+\tau}) - \overline{\eta_{k+\tau} - \hat{g}_{k,k+\tau}}\}^2} \quad (5.1)$$

ただし, $\overline{\eta_{k+\tau} - \hat{g}_{k,k+\tau}}$ は $\eta_{k+\tau} - \hat{g}_{k,k+\tau}$ の標本平均である. また, 本分析においては, AR モデルを計算する際の学習期間のサンプル数を $L = 90$ (日) に設定する. なお, RW 予測においては, (5.1) 式の $\hat{g}_{k,k+\tau}$ をそのまま η_k で置き換えることで MAE, SD が計算される.

Fig. 5.3 の黒の実線は AR 予測, グレーの実線は RW 予測, 点線は無条件の場合 (予測値を 0 とした場合) の残差予測誤差について, MAE と SD を計算した結果である. ただし, 左図が MAE, 右図が SD であり, 横軸は予測ホライズン τ を示す. まず, RW 予測と AR 予測を比較すると, MAE, SD とともに予測ホライズンが長くなるにつれて予測誤差は増

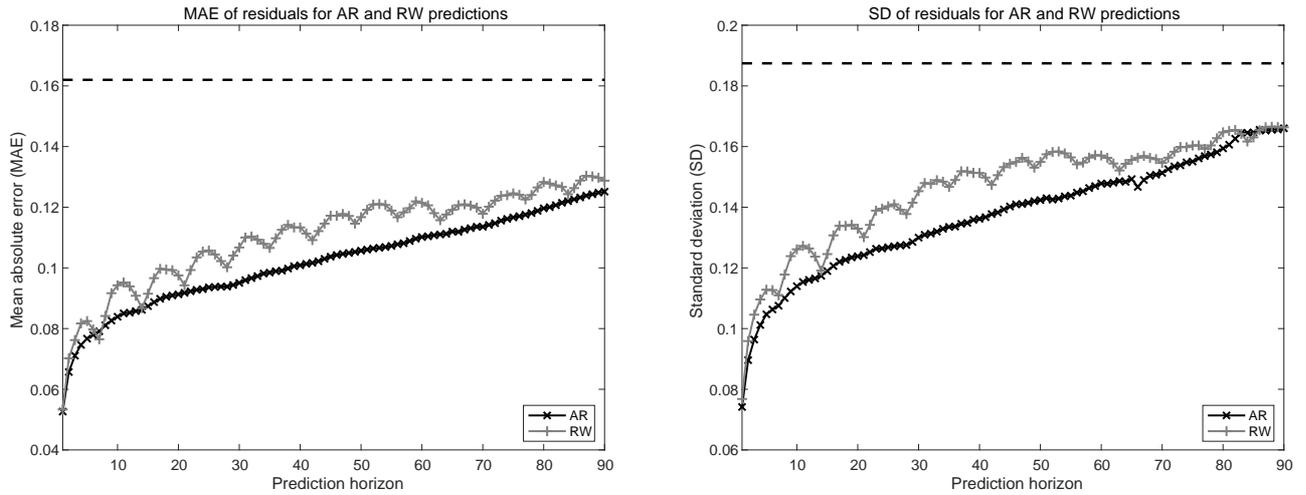


Fig. 5.3: 残差予測の MAE (左) と標準偏差 (右)

加傾向になるが、予測ホライズンが 90 日間の場合でも、無条件の場合の予測に比べ、条件付期待値を用いることの予測精度の向上が得られている。ただし、RW 予測の方は MAE と SD が週次のトレンドをもっているのに対して、AR 予測は全体的に滑らかな単調増加関数になっている。さらに、ほぼ全ての予測ホライズンについて、AR 予測の方が RW 予測に比べて MAE, SD の値が小さく、高い予測精度を達成していることが分かる。

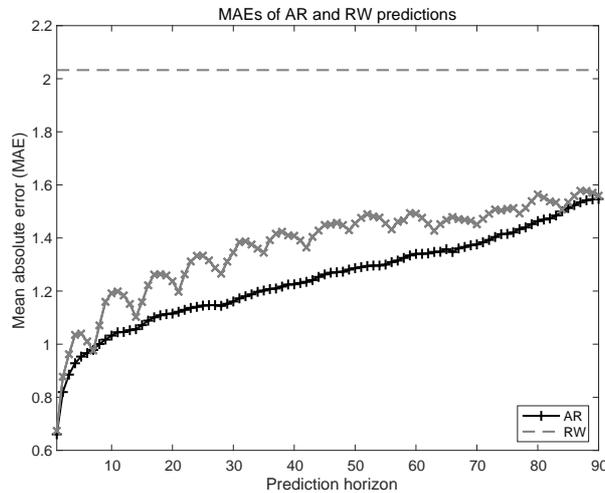


Fig. 5.4: 先渡価格の MAE

残差の MAE, SD を算出する際に用いた $\eta_{k+\tau} - \hat{g}_{k,k+\tau}$, $k = L, L+1, \dots, N-\tau$ は予測誤差の標本分布を与えるので、これらの値を用いれば、予測誤差の標本分布に基づく先渡価格の推定値は、(4.4) 式の $\hat{F}_{t,t+\tau}$ として計算される。時点 $t+\tau$ の原資産価格の条件付期待値 $\mathbb{E}[S_{t+\tau} | \mathcal{F}_t]$ の推定値 (すなわち $\hat{F}_{t,t+\tau}|_{\lambda=0}$) と実績値 $S_{t+\tau}$ との差は原資産価格の

予測誤差を与えるので、残差予測誤差のケースと同様に、MAE あるいは SD を計算することで、原資産価格に対する予測精度を評価することができる。Fig. 5.4 の左図は、原資産価格の実績値と予測値の MAE を次式を用いて計算した際の、予測ホライズン τ と MAE との関係を示す¹¹。

$$MAE = \frac{1}{N - \tau - L + 1} \sum_{k=L}^{N-\tau} \left| S_{k+\tau} - \hat{F}_{k,\tau} \Big|_{\lambda=0} \right| \quad (5.2)$$

ただし、黒の実線は AR 予測、グレーの実線は RW 予測、点線は無条件期待値による予測を適用した際の MAE である。残差予測値に対する MAE と同様に、予測ホライズンが長期になるにつれて MAE は増加するが、AR 予測は全体的に滑らかな単調増加関数であり、かつ、全ての予測ホライズンにおいて MAE で見積もる予測精度が高いものとなっている。

5.3 先渡価格実績値との比較

最後に、先渡価格の実績値と提案手法によって求めた先渡価格の比較を行う。分析データは、2014 年度から 2015 年度にかけて取引された週間 24 時間型先渡に、直近で取引されたものを加えた計 11 件の先渡契約に関するデータである¹²。なお、JEPX の先渡市場はザラバであり、取引成立時の先渡価格と受け渡し期間は一定期間後にデータとして公表されているが、取引時点については、実際に取引が成立した時点ではなく週次の期間となっている。このような契約時点が週次期間であることを考慮するため、本節においては、提案手法を適用する際、週次期間内の異なる時点全ての先渡価格を求めた上で、それらの平均値を採用するものとする。例えば、 t_0 から t_1 の期間に先渡契約が成立した場合、 $t_0 + \tau$ から受け渡し開始の先渡価格は、提案手法を用いて以下のように推定される。

$$\frac{1}{t_1 - t_0 + 1} \sum_{t=t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \hat{F}_{t,\tau+t_0+i} \right) \quad (5.3)$$

ただし、 τ は t_0 から受け渡し初日までの期間であり、週間 24 時間型では、受け渡し期間は $m = 7$ (日間) である。また、(5.3) 式において $\lambda = 0$ とした場合が、受け渡し期間における原資産価格平均の予測値を与える。

Fig. 5.5 の左図は、受け渡し期間における原資産価格平均の実績値から予測値 ((5.3) 式において $\lambda = 0$ とした値) を引いた予測誤差と、先渡ペイオフの実績値 (受け渡し期間の原資産価格平均から実績先渡価格を引いた値) を比較している¹³。ただし、黒、グレー、白の棒グラフはそれぞれ、横軸の番号に対応する左下の日付を受け渡し初日とする先渡契約について、AR 予測による予測誤差、RW 予測による予測誤差、先渡ペイオフを表示している¹⁴。

まず、先渡ペイオフについては、原資産の平均価格を先渡価格が上回る傾向にある。このことは、先渡価格にリスクプレミアムが加味されている可能性を示唆する。実際に、3 つの棒グラフ (AR 予測誤差、RW 予測誤差、先渡ペイオフ) の平均を計算すると、

$$0.3650, \quad 0.4699, \quad -0.9178$$

¹¹ここでは MAE のみ示すが、SD についても同様の結果が得られる。

¹²<http://www.jepx.org/market/forward.html> より、週間 24 時間型先渡については、2014 年度に 8 件、2015 年度に 2 件の取引が成立している。これに、2016 年 12 月 31 日現在で同 HP に掲載されている 12 月 24 日-12 月 30 日受け渡しの先渡を加えて分析をしている。

¹³JEPX で取引される先渡ペイオフは、実際には日次のペイオフの累積値によって与えられるが、ここでは、累積値を日数で割ることで平均値に換算してペイオフを計算している。

¹⁴例えば、番号 1 の上に示される 3 つの棒グラフは、受け渡し初日が 2014 年 2 月 1 日の週間 24 時間型先渡に対してのものである。

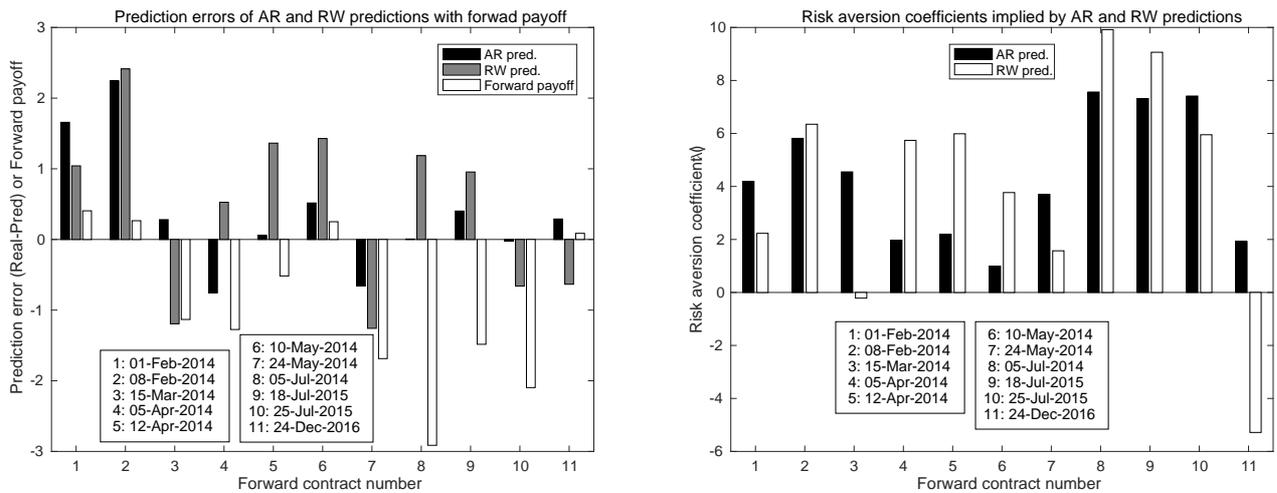


Fig. 5.5: AR 予測と RW 予測による予測誤差とペイオフの実績値 (左), および先渡価格からインプ
ライされるリスク回避係数 (右)

であり, 先渡ペイオフは 5%水準で有意な負のバイアスをもつ. 一方, AR 予測誤差, RW 予測誤差は正のバイアスが存在しているが, 有意水準 5%では, t 検定における平均 0 の帰無仮説は棄却はされない. また, 絶対値の平均を計算すると,

$$0.6265, 1.1509, 1.1011$$

であり, 原資産価格に対する予測性という意味では, 本例においては AR 予測が最も高い精度を達成している.

Fig. 5.5 の右図は, 先渡価格の推定値が実績値と等しくなるように最適化を行った際の最適な λ の値を表示したものである. ただし, 黒の棒グラフは AR 予測, 白の棒グラフは RW 予測の結果を示す. これらのグラフから, AR 予測を用いた場合は, 全ての番号において正のリスクプレミアムが観測されることが分かる. また, 受け渡し期間が夏季である 8 番目から 10 番目にかけてのリスクプレミアムが相対的に高い値となっているが, このようなリスクプレミアムの季節性については, 今後, 先渡の実績価格が増えるにつれて明らかになることが期待される.

Fig. 5.6 と Fig. 5.7 は, Fig. 5.5 における 11 件の先渡契約のうち, ペイオフの絶対値が最も高い 8 番の先渡契約と最も低い 11 番の先渡契約について, 受け渡し初日を 0 として $-1, -2, \dots$, のように遡った時点における先渡価格推定値の時系列を, AR 予測 (左図) と RW 予測 (右図) のそれぞれについて表示したものである. ただし, 黒の実線が先渡価格の推定値, グレーの実線が $\lambda = 0$ の場合の原資産価格予測値, 点線は各時点の日次スポット価格 (システムプライスの日次平均) である. また, x 軸に水平な 2 本の線のうち, 破線は先渡価格実績値, 一点鎖線は受け渡し期間の原資産価格平均の実績値を表す. 垂直な 2 本の直線は, この期間に先渡取引が成立したことを意味し, この期間の先渡価格の平均が先渡価格実績値と一致するように, Fig. 5.5 の λ は計算されている.

まず, AR 予測値と RW 予測値を比較すると, 左図の AR 予測の結果の方が全体的に滑らかであり, 右図の RW 予測は日次スポット価格と同様にばらつきが大きいことが分かる. これは, RW 予測の場合, 各時点の残差観測値が将来時点の残差予測値を与えるため, 先渡価格の推定値も各時点のスポット価格 (日次価格) に連動して推移することによる. 一方, AR 予測の場合は, 残差予測値がラグによって与えられる範囲の観測値全てに依存するため, 個別時点におけるス

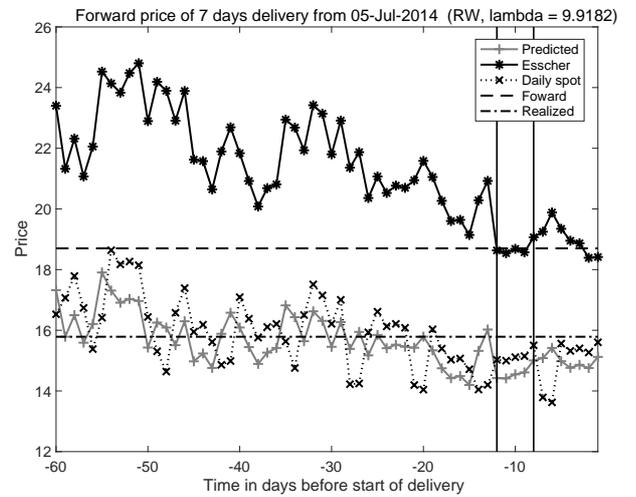
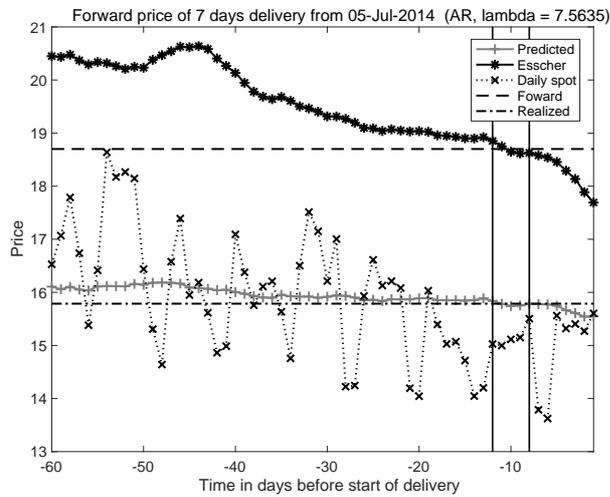


Fig. 5.6: 受け渡し期間が 2014 年 7 月 5 日から 7 日間の先渡価格に対する AR 予測結果 (左) と RW 予測結果 (右)

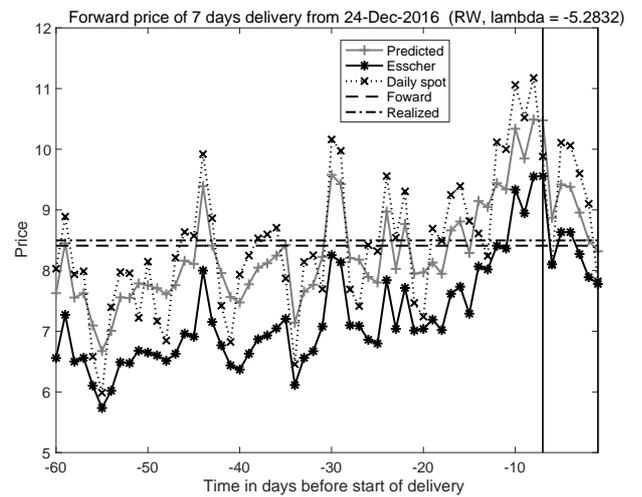
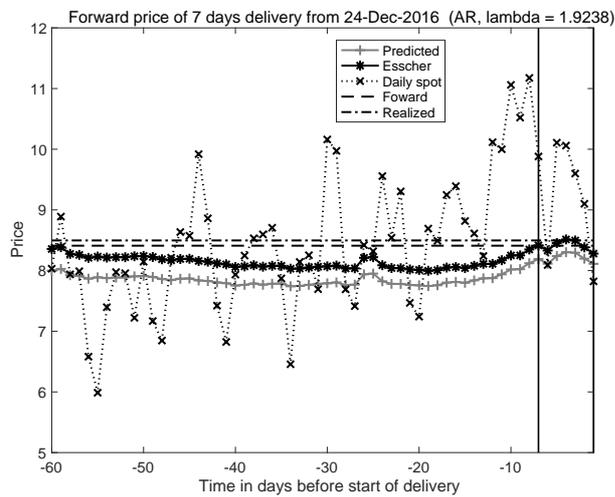


Fig. 5.7: 受け渡し期間が 2016 年 12 月 24 日から 7 日間の先渡価格に対する AR 予測結果 (左) と RW 予測結果 (右)

ポット価格の影響が平滑化され、滑らかな(ばらつきの少ない)系列になるものと考えられる。電力価格の場合、ある時点の価格が突出して跳ね上がる価格スパイクと呼ばれる現象が観測されるのであるが、RW 予測の場合、条件付期待値がこのような価格スパイクの影響を直接的に受けるため、先渡価格推定値もスパイクをもつ可能性がある。価格スパイクは必ずしも持続しない特異な現象であり、スパイクのある期間に先渡価格を計算する際は、スパイクの起こった時点のみではなく複数時点において観測された価格を平均的に考慮すべきと考えられる。また、電力価格の場合は平均回帰性も想定されるので、この点においても、AR モデルを利用する手法がより有効であることが期待される。

6 おわりに

本論文では、JEPX スポット価格の対数系列を確定的な時間の関数であるカレンダートレンドと不確実な残差項に分解した上で、残差項に対して状態空間モデルを適用するという枠組みで、先渡の原資産である JEPX スポット価格をモデル化した。さらに、Esscher 変換を適用し、リスクプレミアムを考慮した先渡価格を導出した。また、2012 年 4 月 1 日から 2016 年 12 月 31 日までの JEPX システムプライスと上記期間内に取引が成立した週間 24 時間型先渡価格を用いて、提案手法を適用した際の予測精度や実績データがインプライするリスク回避係数について検証を行った。

本分析で用いたデータ期間における週間 24 時間型先渡契約の取引実績においては、先渡ペイオフの平均が有意に負であり、受け渡し期間における原資産価格を先渡価格が上回る傾向にある。同様の傾向は、リスクプレミアムの符号にも反映されており、提案モデル (AR 予測) によって推定されるリスクプレミアムは全て正值として観測されている。このことは、少なくとも分析に用いたサンプルでは、売り手側のリスクプレミアムに買い手側が同意することで取引が成立した可能性が高いことを示唆する。言い換えれば、売り手側にとっては、先渡期間に固定価格で取引することのリスクが(買い手側が抱えると想定されるリスクと比べて)大きく、結果として相対的に高いリスクプレミアムを要求した上で入札が行われる傾向があることを意味する。一方、取引件数は少ないが、仮に正のリスクプレミアムを要求されたとしても、買い手側にとって先渡取引を行う潜在的ニーズは少なからず存在するため、売り手側リスクプレミアムを少しでも低下させることができれば、先渡市場の活性化につながることを期待される。よって本分析結果の一つの提言として、今後、先渡取引を活性化する上では、エネルギーデリバティブなど、売り手側のリスクを低減化し、リスクプレミアムを低下させる仕組みを同時に整えることが重要と考えられる。

また、満期の異なる先渡が活発に取引されるようになれば、先渡価格間で裁定機会を打ち消す取引も行うことができるようになり、適正価格での取引を促すことにつながる。実際には、受け渡し期間が異なる先渡は取引期間も異なるので、このような完全な裁定機会を利用することは難しいかもしれないが、その場合でも、本論文で提案したようにスポット価格のモデルを介して適正先渡価格を推定し、先渡取引に利用することは実行可能である。これらを含めて、今後の課題としては、提案モデルと実績先渡価格から推定されるリスクプレミアムの季節性や実績先渡価格を考慮した先渡期間構造(フォワードカーブ)の分析、および提案モデルを用いた先渡取引手法の構築が挙げられる。

参考文献

- [1] F. Black and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, **81**, pp. 637-654, 1973.

- [2] M.J. Brennan and E.S. Schwartz, “Evaluating Natural Resource investments,” *The Journal of Business*, 58(2), pp. 135–157, 1985.
- [3] R. Carmona and M. Ludkovski, “Spot convenience yield models for the energy markets,” *Contemporary Mathematics*, vol. 351, pp. 65–80, 2004.
- [4] J. Durbin and S.J. Koopman, *Time Series Analysis by State Space Methods: Second Edition*, Oxford Statistical Science Series (Vol. 24), Oxford University Press, 2001.
- [5] 木島, 田中, “資産の価格付けと測度変換 (シリーズ・金融工学の新潮流),” 朝倉書店, 2007.
- [6] R. Gibson and E. Schwartz, “Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims,” *The Journal of Finance*, 45(3), pp. 959–976, 1990.
- [7] T. Hastie and R. Tibshirani, *Generalized Additive Models*, Chapman & Hall, 1990.
- [8] H. Miyauchi and T. Misawa, “Regression Analysis of Electric Power Market Price of JEPX,” *Journal of Power and Energy Engineering*, 2, 483–488, 2014.
- [9] A. Neumaier and T. Schneider, “Algorithm 808: ARfit. A Matlab package for the estimation of parameters and eigenmodes of multivariate autoregressive models,” *ACM Trans. on Mathematical Software*, 27(4), 58–65, 2001.
- [10] 西川, “需給明示型モデルによる電力取引市場価格仮定の分析,” *JAFEE 冬季大会予稿集*, 92–105, 2005.
- [11] 日本卸電力取引所取引ガイド Ver. 2.00, 日本卸電力取引所 (<http://www.jepx.org/>), 2016.
- [12] 大藤, 兼本, “状態空間モデルを用いた JEPX 価格モデリングの基礎検討,” *電気学会論文誌 (B)*128 巻 1 号, 57–66, 2008.
- [13] 大藤, 巽, “誤差修正モデルを用いた JEPX 前日スポット約定量の時系列分析,” *電気学会論文誌 (B)*133 巻 8 号, 664–671, 2013.
- [14] E.S. Schwartz, “The stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications of Valuation and Hedging,” *The Journal of Finance*, 52(3), pp. 923–973, 1997.
- [15] E.S. Schwartz and J.E. Smith, “Short-Term Variations and Long-Term Dynamics in Commodity Prices,” *Management Science*, 46(7), pp. 893–911, 2000.
- [16] S.E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer, 2004.
- [17] 辻谷, 外山, “R による GAM 入門,” *行動計量学* 34(1), 111–131, 2007.
- [18] 山口, “同時方程式モデルを用いた JEPX の電力取引動向の実証研究,” *電力中央研究所 研究報告書*, Y06006, 2007.
- [19] 山田, 牧本, 高嶋, “一般化加法モデルを用いた JEPX 時間帯価格予測と入札量- 価格関数の推定,” *JAFEE ジャーナル* 第 14 巻, pp. 8-39, 2015.

付録

A ファクターモデルおよび Girsanov 変換との比較

本節では、提案モデルと金融工学分野における既存モデルとの関係について述べる．本節で比較対象とするモデルあるいは手法は、連続時間の記法に基づくため、ここでは、 t を連続的な時点を表す変数、 $W_t = [W_{1,t}, \dots, W_{n,t}]^\top \in \mathbb{R}^n$ を \mathbb{P} 上の n 次元標準 Brown 運動、 $\{\mathcal{F}_t\}$ を $\{W_t\}$ によって生成されるフィルトレーションとして議論を進める．

A.1 ファクターモデルおよび線形時系列モデルとの関係

先渡やデリバティブの価格付けを目的とした電力（あるいはエネルギー等）のスポット価格については、以下に説明するファクターモデルを中心として様々なモデルが提案されている．Brennan and Schwartz [2] は、幾何 Brown 運動に定数コンビニエンスイールドを導入してスポット価格をモデル化し、先渡およびデリバティブ価格を導いている．平均回帰性を考慮した Ornstein-Uhlenbeck 過程として対数スポット価格表現するケース（例えば [14]）を含め、これらのモデルは 1 ファクターモデルと呼ばれる．Gison and Schwartz [6] は、1 ファクターモデルを、コンビニエンスイールドも確率的に変動する 2 ファクターモデルに拡張し、原油先物の価格付けに対して適用している．また、Schwartz and Smith [15] は、短期変動と均衡レベルの不確実性を 2 ファクターモデルとして表現し、Gison and Schwartz [6] のモデルと比較している．さらに、これらの結果を 3 ファクターに拡張する試みも注目されている（例えば [3] 参照）．これらのファクターモデルは、状態ベクトルや観測出力を適切に設定することで、状態空間モデル (3.6) として表現することが可能である．

以下、2 ファクターモデルである Schwartz and Smith [6]（以下 SS モデル）が、状態空間モデル (3.6) に帰着されることを示す．連続時間の記法を用いれば、SS モデルは、以下の 2 次元確率微分方程式として与えられる．

$$\begin{aligned} d\chi_t &= -\kappa\chi_t dt + \sigma_\chi dW_{1,t} \\ d\xi_t &= \mu_\xi dt + \sigma_\xi dW_{2,t} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$dt \simeq \Delta_t$ として (A.1) 式を離散時間表現すると、

$$\begin{aligned} \chi_{(t+1)\Delta_t} &= (1 - \kappa\Delta_t)\chi_{t\Delta_t} + \sigma_\chi\sqrt{\Delta_t}w_{1,t} \\ \xi_{(t+1)\Delta_t} &= \xi_{t\Delta_t} + \mu_\xi\Delta_t + \sigma_\xi\sqrt{\Delta_t}w_{2,t} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

である．従って、 t を改めて離散時点を表す変数 $t = 0, 1, 2, \dots$ とみなし、

$$x_{t+1} \equiv \begin{bmatrix} \chi_{(t+1)\Delta_t} \\ \xi_{(t+1)\Delta_t} \end{bmatrix}, \quad x_t \equiv \begin{bmatrix} \chi_{t\Delta_t} \\ \xi_{t\Delta_t} \end{bmatrix}, \quad w_t \equiv \begin{bmatrix} w_{1,t} \\ w_{2,t} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 - \kappa\Delta_t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \sigma_\chi\sqrt{\Delta_t} & 0 \\ 0 & \sigma_\xi\sqrt{\Delta_t} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

として書き直すと、(A.2) 式は (3.6) 式のように状態空間表現されることが分かる．ただし、(A.2) 式における第 2 番目の差分方程式は定数項をもつが、このような定数項は (3.1) 式のトレンド項 $f(t)$ に含ませることができることに注意する．

A.2 Girsanov 変換との比較

最後に、金融工学分野で頻繁に用いられる Girsanov の定理¹⁵に基づく測度変換 (以下、Girsanov 変換) と、前節で導入した Esscher 変換との比較を行う。Girsanov の変換における確率変数 Z_t および変換後の確率測度 $\tilde{\mathbb{P}}$ は、以下のよう
に定義される¹⁶。

$$Z_t := \mathbb{E} \left[\frac{e^{\int_0^T \theta_t dW_t}}{\mathbb{E} \left[e^{\int_0^T \theta_t dW_t} \right]} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T \quad (\text{A.4})$$

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{E}[I_A Z_T], \quad A \in \mathcal{F}_T$$

また、Girsanov の定理によれば、次式を満たす \widetilde{W}_t は、 $\tilde{\mathbb{P}}$ の下で標準 Brown 運動を与える。

$$d\widetilde{W}_t = dW_t - \theta_t dt \quad (\text{A.5})$$

今、連続時間の記法と \mathbb{P} 上の n 次元標準 Brown 運動 $W_t \in \mathbb{R}^n$ を用いて、 η_t の従う確率微分方程式が以下のように与えられると仮定する。

$$\begin{cases} dx_t &= (Ax_t + D) dt + BdW_t \\ \eta_t &= C^\top x_t \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

ただし、 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $C \in \mathbb{R}^n$ 、 $D \in \mathbb{R}^n$ は、(A.6) 式と同様に定数行列 (あるいはベクトル) であるが、状態変数 $x_t \in \mathbb{R}^n$ 、出力 η_t 、および $W_t \in \mathbb{R}^n$ は、連続時間の確率過程であることに注意する。なお、(A.1) 式を離散時間表現した (A.2) 式と同様に、(A.6) 式は離散化することで、(3.6) 式のように状態空間表現される。

第 1 式を x_T について解いたものに $\eta_T = C^\top x_T$ を適用すると、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \eta_T = C^\top x_T &= C^\top e^{AT} x_0 + C^\top e^{AT} \int_0^T e^{-At} D dt + C^\top e^{AT} \int_0^T e^{-At} B dW_t \\ &= C^\top e^{AT} x_0 + \int_0^T C^\top e^{A(T-t)} D dt + \int_0^T C^\top e^{A(T-t)} B dW_t \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

(A.7) 式を Esscher 変換における Z_t 、すなわち (3.2) 式に代入すると、

$$Z_t := \mathbb{E} \left[\frac{e^{\lambda \int_0^T C^\top e^{A(T-t)} B dW_t}}{\mathbb{E} \left[e^{\lambda \int_0^T C^\top e^{A(T-t)} B dW_t} \right]} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T \quad (\text{A.8})$$

であるが、(A.8) 式は Girsanov 変換における (A.4) 式の Z_t において、

$$\theta_t \equiv \lambda C^\top e^{A(T-t)} B \quad (\text{A.9})$$

とすることに対応する。言い換えれば、原資産価格が (A.4) 式の状態空間モデルに従い、かつ θ_t が (A.9) 式を満たす場合に、Girsanov 変換と Esscher 変換は等価な測度変換を与える。

¹⁵例えば [5] 参照。

¹⁶ $\theta_t \in \mathbb{R}^n$ は、各要素が \mathcal{F}_t -可測な確率過程として与えられる n 次元ベクトルであるが、本論文では、簡単のため $\theta_t \in \mathbb{R}^t$ の各要素は確定的な時間の関数とする。

B 先渡価格の理論的表現と AR モデルの条件付き期待値

B.1 先渡価格の理論的表現

(3.14) 式先渡価格は、 $\eta_T - g_{t,T}$ のキウムラント母関数を $\phi_{\eta_T - g_{t,T}}$ とすれば、以下のように書き直すことができる。
 $\eta_T - g_{t,T}$ の標準偏差を $\sigma_{\eta_T - g_{t,T}}$ とすれば、キウムラント母関数 $\phi_{\eta_T - g_{t,T}}$ は、

$$\phi_{\eta_T - g_{t,T}}(x) = \frac{\sigma_{\eta_T - g_{t,T}}^2}{2} x^2$$

を満たすので、(3.14) 式先渡価格は、以下のように書き表すことができる。

$$\begin{aligned} F_{t,T} &= e^{f(T) + g_{t,T}} \times \frac{\exp\{\phi_{\eta_T - g_{t,T}}(\lambda + 1)\}}{\exp\{\phi_{\eta_T - g_{t,T}}(\lambda)\}} \\ &= \exp\{f(T) + g_{t,T} + \phi_{\eta_T - g_{t,T}}(\lambda + 1) - \phi_{\eta_T - g_{t,T}}(\lambda)\} \\ &= \exp\left\{f(T) + g_{t,T} + \sigma_{\eta_T - g_{t,T}}^2 \times \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\right\} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

B.2 AR モデルの条件付き期待値

(3.7) 式 $AR(p)$ において、 $p = 1$ の場合を考える。(3.7) 式を再帰的に適用することにより、 $\eta_{t+\tau}$ は以下のように展開される。

$$\eta_{t+\tau} = a_1^\tau \eta_t + (a_1^{\tau-1} + \dots + a_1 + I) c + (a_1^{\tau-1} \epsilon_{t+1} + \dots + a_1 \epsilon_{t+\tau-1} + \epsilon_{t+\tau})$$

さらに、 $\mathbb{E}[\eta_{t+k} | \mathcal{F}_t] = 0$, $k = 1, \dots, \tau$ であるので、条件付き期待値 $\mathbb{E}[\eta_{t+\tau} | \mathcal{F}_t]$ は次式のように与えられる。

$$\mathbb{E}[\eta_{t+\tau} | \mathcal{F}_t] = a_1^\tau \eta_t + (a_1^{\tau-1} + \dots + a_1 + 1) c \quad (\text{B.2})$$

また、 $p \geq 2$ の場合は、以下のような拡大系を構成することにより、 $p = 1$ の問題に帰着することができる。

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \eta_t \\ \eta_{t-1} \\ \vdots \\ \eta_{t-p+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \eta_{t-1} \\ \eta_{t-2} \\ \vdots \\ \eta_{t-p} \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_{t-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c \\ c \\ \vdots \\ c \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_t} \Leftrightarrow \mathbf{e}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{e}_{t-1} + \mathbf{c} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (\text{B.3})$$

よって、(B.2) 式において $a_1 \equiv \mathbf{A}_1$, $\eta_t \equiv \mathbf{e}_t$, $c \equiv \mathbf{c}$ とした上で条件付き期待値 $\mathbb{E}[\mathbf{e}_{t+\tau} | \mathcal{F}_t]$ を計算し、

$$\mathbb{E}[\eta_{t+\tau} | \mathcal{F}_t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \times \mathbb{E}[\mathbf{e}_{t+\tau} | \mathcal{F}_t] \quad (\text{B.4})$$

とすることで $\mathbb{E}[\eta_{t+\tau} | \mathcal{F}_t]$ が求められる。なお、上記の条件付期待値計算の手順は、状態空間モデル (3.6) を構築することと基本的には等価である。